MAI 2 Příklady - dvojný integrál:

Vypočítejte integrály:

1. $\iint_D xy\,dx\,dy$, $D=\{[x,y];\ 0\le x\le 1, 0\le y\le 2\}$
2. $\iint_D e^{x+y}\,dx\,dy$, $D=\{[x,y];\ 0\le x\le 1, 0\le y\le 1\}$
3. $\iint_D (x^2+y^2)\,dx\,dy$, $D=\{[x,y];\ -1\le x\le 1,\ -2\le y\le 2\}$
4. $\iint_D f(x)g(y)\,dx\,dy$, $D=\{[x,y];\ a\le x\le b,\ c\le y\le d\}$;
5. $\iint_D (x-y)\,dx\,dy$, kde oblast D je ohraničená přímkami $x=0$, $y=0$, $x+y=2$
6. $\iint_D \frac{x^2}{y^2}\,dx\,dy$, kde omezená oblast D je ohraničená přímkami $x=2$, $y=x$ a křivkou $x\cdot y=1$

V následujících příkladech změňte pořadí integrace:

1. $\int_0^1 dy \int_0^y f(x,y)\,dx$; 2. $\int_0^1 dx \int_{2x}^{3x} f(x,y)\,dy$; 3. $\int_{-3}^0 dx \int_{-x}^3 f(x,y)\,dy + \int_0^3 dx \int_x^3 f(x,y)\,dy$.

Znázorněte oblasti, jejichž obsahy jsou vyjádřeny pomocí následujících integrálů:

1. $\int_{-1}^2 dx \int_{x^2}^{x+2} f(x,y)\,dy$; 2. $\int_0^{\pi} dx \int_1^{1+\cos x} f(x,y)\,dy$; 3. $\int_1^3 dy \int_{\frac{y^2}{4}}^{y^2} f(x,y)\,dx$.

Aplikace dvojného integrálu:

1. Vypočítejte objem tělesa, ohraničeného rovinami $x=0, y=0$, $z=0$, $x=4, y=4$ a plochou $z=x^2+y^2+1$.
2. Vypočítejte objem tělesa, ohraničeného rovinami $z=0$, $x+y+z=2$ a plochou $y=x^2$.
3. Vypočítejte objem tělesa, ohraničeného rovinami $z=0$, $y=0$, $x+y+z=2$ a plochou $y=x^2$.
4. Vypočítejte objem tělesa, ohraničeného rovinou $z=0$ a plochami $z=4-y^2$ a $y=\frac{x^2}{2}$.
5. Zkuste si představit nějaké aplikace integrálu $\iint_D (x^2+y^2)\,dx\,dy$, kde $D=\{[x,y];\ -1\le x\le 1,\ -2\le y\le 2\}$.
6. Vypočítejte hmotnost čtvercové desky o straně $2a$ ($a>0$) zanedbatelné tloušťky, je-li plošná hustota přímo úměrná druhé mocnině vzdálenosti bodu od středu desky a ve vrcholech čtverce je rovna jedné.
7. Určete těžiště omezené rovinné homogenní oblasti (zanedbatelné tloušťky), ohraničené parabolami $y=x^2$ a $y^2=x$.
8. Určete moment setrvačnosti homogenního trojúhelníka, ohraničeného přímkami $x=2$, $y=2$ a $x+y=2$, vzhledem k ose x.

Pomocí substituce do polárních souřadnic

I. „Ověřte“ vzorec pro výpočet obsahu kruhu o poloměru R .

II. A spočítejte :

1. $\iint_K (x^2+y^2)dxdy$, $K=\{[x,y];\ x^2+y^2 \le R^2\}$ - co by tento integrál mohl „počítat“ ?
2. $\iint_K (x^2+y^2)dxdy$, $K=\{[x,y];\ (x-R)^2+y^2 \le R^2\}$ - co by tento integrál mohl „počítat“ ?
3. $\iint_D y\,dxdy$, $D=\{[x,y];\ x^2+y^2 \le R^2,\ y \ge 0\}$.
4. $\iint_D \sin(\sqrt{x^2+y^2})dxdy$, $D=\{[x,y];\ \pi^2 \le x^2+y^2 \le 4\pi^2\}$.
5. Vypočítejte hmotnost kruhu o poloměru R, je-li (plošná) hustota přímo úměrná vzdálenosti bodu od středu kruhu.
6. Vypočítejte moment setrvačnosti kruhu o poloměru R vzhledem k ose, procházející jeho středem S kolmo na rovinu kruhu, je-li hustota přímo úměrná vzdálenosti bodu od středu S.